Orígenes y fundamentos del Procesamiento Digital de señales

Larry Escobar

18 de noviembre de 2015

Universidad Nacional Autónoma de México

Indice

Indice

Indice

Indice

Indice

Indice

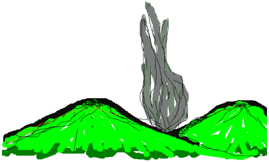
Indice

Objetivo

Mostrar que el procesamiento digital de señales (PDS) ha estado presente durante muchos hechos históricos de la humanidad y en la actualidad se encuentra presente en gran cantidad de actividades y aplicaciones de la vida diaria.

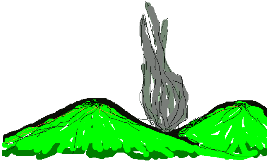
Hipótesis de los orígenes del PDS

Cuando el hombre empezó a: *observar*



Hipótesis de los orígenes del PDS

Cuando el hombre empezó a: *observar*

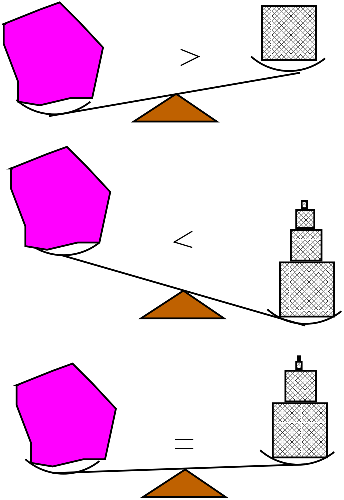


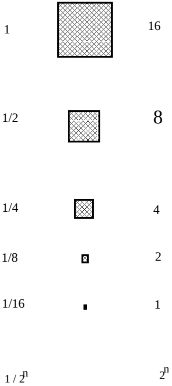
Contar:

Los Sumerios (2500 A.C.)
Los Babilonios (1900 A.C.)
Los Mayas (300 a 1000 D.C.)

Cuando el hombre empezó a medir: la balanza

Cuando el hombre empezó a medir: la balanza





Algoritmos

- Operaciones Lógicas y Aritméticas

- Comparar	- Aproximar	- Decidir
- Sumar	- Restar	

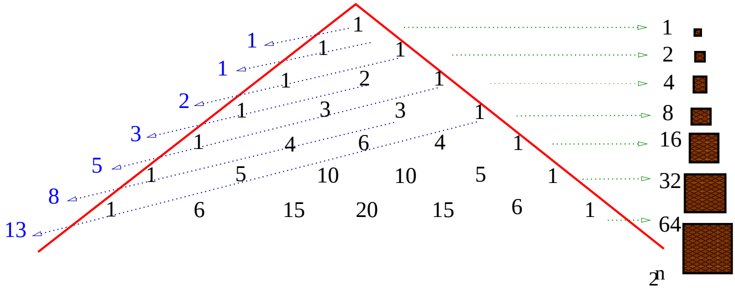
Algoritmos

- Operaciones Lógicas y Aritméticas
  - Comparar - Aproximar - Decidir
  - Sumar - Restar
- Algoritmo de aproximaciones sucesivas:
  - En convertidores ADC
  - Algoritmo de la división
  - Algoritmo la raíz cuadrada

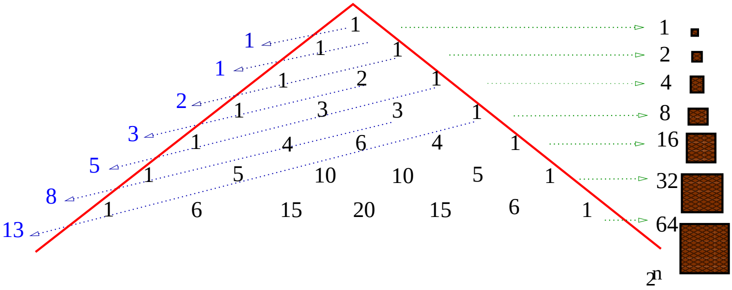
Algoritmos

- Operaciones Lógicas y Aritméticas
  - Comparar - Aproximar - Decidir
  - Sumar - Restar
- Algoritmo de aproximaciones sucesivas:
  - En convertidores ADC
  - Algoritmo de la división
  - Algoritmo la raíz cuadrada
- Triangulo de Pascal:
  - Ecuación binomial
  - Serie de Fibonacci
  - Proporción Aurea

Triángulo de Pascal (1623-1662) y Fibonacci



Triángulo de Pascal (1623-1662) y Fibonacci



La suma de cada línea del triángulo de Pascal da 2^n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n$$

Una palabra digital

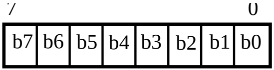
Número entero positivo X

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

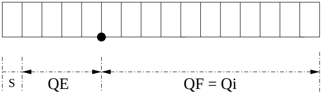
Una palabra digital

Número entero positivo X

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$



a) Formato de Punto Fijo



b) Formato de punto Flotante

Serie de Fibonacci

Ecuación en diferencias:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

En forma cerrada

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Serie de Fibonacci

Ecuación en diferencias:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

En forma cerrada

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Proporción Aurea:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989$$

$\Phi^2 = 2.61803398874989$ y $1/\Phi = 0.61803398874989$

Fechas y eventos que influyeron en el PDS

- Fundamentos de la geometría, los griegos 700 a 100 A.C
- Evolución del álgebra, los árabes 700 D.C.
- Surgimiento del cálculo, 1600 D.C.
- Desarrollo de métodos numéricos, siglos XVII y XIX
- Las series de Fourier, 1800
- Los circuitos integrados y las computadoras

Algoritmo de Arquímides (griego 287-212 A.C.) [A. Antoniou]

Calculó π a través del perímetro de un círculo

$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$ $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$ error e= 0.008 %

P y p: son los polígonos exterior e interior de n lados

Círculo de radio 1/2, $p_{2n} < \pi < P_{2n}$

P_{2n} y $p_{2n} \longrightarrow \pi$ en la quinta iteración,

Algoritmo de Arquímides (griego 287-212 A.C.) [A. Antoniou]

Calculó π a través del perímetro de un círculo

$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}$ $\quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$
P y p: son los polígonos exterior e interior de n lados
Círculo de radio 1/2, $p_{2n} < \pi < P_{2n}$
P_{2n} y $p_{2n} \longrightarrow \pi$ en la quinta iteración,

error e= 0.008 %

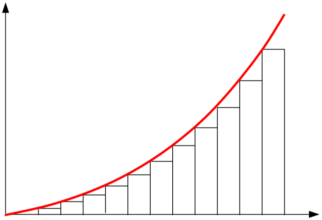
- Liu Hui (220-280 AC) calculó π de forma similar
- Tsu-Chun Chi (430 -500 DC), lo calculó con mayor precisión.

Grandes aportes con algoritmos similares

John Wallis (inglés 1616-1703) y James Gregory (escocés 1638–1675).
Extendieron la idea de Arquímides al área de varias figuras geométricas.

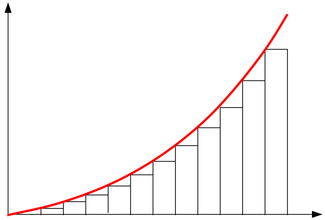
Grandes aportes con algoritmos similares

John Wallis (inglés 1616-1703) y James Gregory (escocés 1638–1675).
Extendieron la idea de Arquímides al área de varias figuras geométricas.
Wallis: Consideró el área bajo una parábola en forma recursiva e introdujo el concepto de muestreo y del infinito, propuso el símbolo ∞. Descubrió el principio de límite



Grandes aportes con algoritmos similares

John Wallis (inglés 1616-1703) y James Gregory (escocés 1638–1675). Extendieron la idea de Arquímides al área de varias figuras geométricas.
*W*allis: Consideró el área bajo una parábola en forma recursiva e introdujo el concepto de muestreo y del infinito, propuso el símbolo ∞. Descubrió el principio de límite



*G*regory: Extendió el algoritmo de Arquímides para el cálculo de áreas del círculo y la elipse y fue el primero en usar el concepto de convergencia, trabajó en series infinitas.

Binomio de Newton y transformada Z

Newton (1642–1727), continúo con el trabajo de Wallis, llegando al teorema del binomio

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n$$

Se pueden obtener los números del triángulo de Pascal (1623–1662)
Si $x = z^{-1}$, se obtiene la tranformada TZ de $x(n) = \binom{k}{n}U(n)$

Binomio de Newton y transformada Z

Newton (1642–1727), continúo con el trabajo de Wallis, llegando al teorema del binomio

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n$$

Se pueden obtener los números del triángulo de Pascal (1623–1662)
Si $x = z^{-1}$, se obtiene la tranformada TZ de $x(n) = \binom{k}{n}U(n)$

- Newton y Leibniz a finales de 1600 unificaron estos conceptos en el Cálculo

Grandes matemáticos

- James Stirling (1692–1770). Fórmula de interpolación utilizada para el diseño de filtro digitales, diferenciación e integración
- Euler (1707–1783), cálculo infinitesimal.
- Joseph Louis Lagrange (1736–1813), cálculo de variaciones.
- Gauss (1777–1855), estadísticas, probabilidad y electromagnetismo.
- Siméon Denis Poisson (1781–1840), teoría de potencial, probabilidad, razón de elasticidad.
- Wilhelm Bessel (1784–1846), solución de ecuaciones diferenciales.
- Cauchy (1789–1857), matemáticas complejas.
- Laurent (1813–1854), análisis complejo, series.
- Riemann (1826 - 1866), cálculo y variable compleja.
- Harry Nyquist (1889–1976), teorema del muestreo

La teoría de Fourier

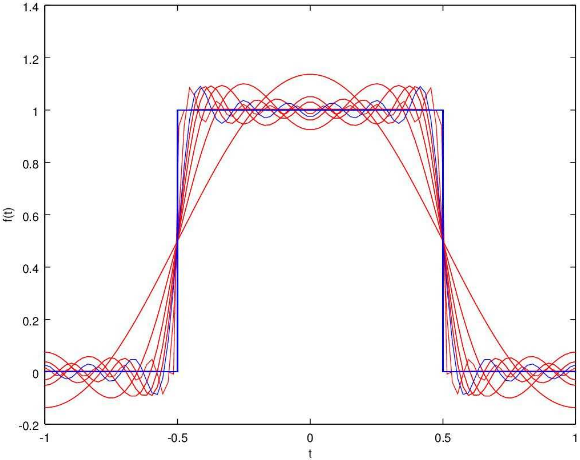
Fourier, estudiante de Lagrange (1736–1813) y Laplace (1749–1827)
Si $x(t)$ es periódica, $x(t) = x(t+T)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n cos(\omega_0 nt) + b_n sen(\omega_0 nt) \right\}$$

donde
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0; \quad f_0 = \frac{1}{T}$
$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)cos(\omega_0 nt)dt$
$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)sin(\omega_0 nt)dt$

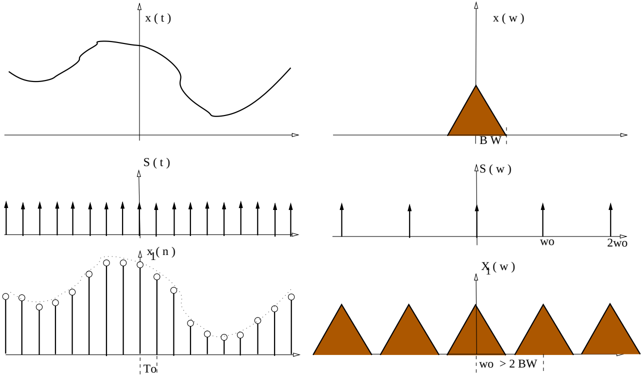
Armónicos de la Serie de Fourier

Señal cuadrada periódica



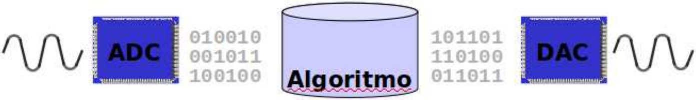
Teorema de Muestreo

Harry Nyquist (suizo, 1889–1976)
Claude Elwood Shannon (USA, 1916–2001)

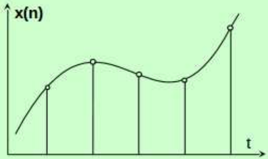


Procesamiento de señales discretas

Sistema básico



Muestreo de una señal analógica



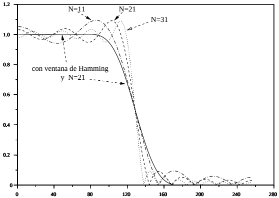
La mayoría de los algoritmos de PDS utilizan la operación convolución:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(n-i)$$

```
for (i = 0; i < N-1; i++){
  sum += h[i] * x[i] }
```

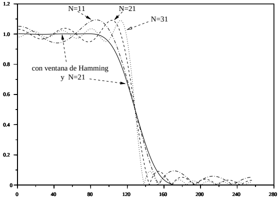
Filtros digitales y la FFT

- Kaiser (1966), aporte a los filtros digitales.
- Hamming, Hanning, Blackman, filtros digitales

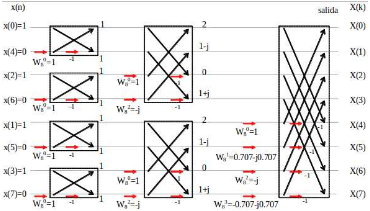


Filtros digitales y la FFT

- Kaiser (1966), aporte a los filtros digitales.
- Hamming, Hanning, Blackman, filtros digitales



- Cooley - Tukey (1965), transformada rápida de Fourier (FFT)



Algoritmos fundamentales del PDS

- Convolución $y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i)$
- Correlación $r_{xy}(l) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty$
- Transformada discreta de Fourier (DFT)
  $H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$
- Transformada coseno discreta (DCT)
- Transformada rápida de Fourier (FFT)
- Ecuación normal (Wiener) $\left[\mathbf{R_x}\right]\left[\mathbf{a}\right] = \left[\mathbf{r_x}\right]$
- Media de los mínimos cuadrados (LMS de Widrow)

Fundamentos del PDS

- La teoría.
- El hardware.
- El software.

Fundamentos del PDS

- La teoría.
- El hardware.
- El software.

Fundamentos teóricos

- Matemáticas discretas
- Probabilidad y estadística
- Variable compleja
- Transformada Z
- Análisis espectral
- Señales y sitemas
- Filtros Digitales

Hardware y software

- Charles Babbage (1791–1871), diseñó una máquina de diferencias sin poderla construir.
- Programación de sistemas digitales.
- Los métodos numéricos encontraron con las computadoras digitales, un gran progreso en los años 1950 y 60 en el desarrollo de algoritmos aplicados a procesar señales representadas en términos de datos numéricos.

Los avances tecnológicos

- El desarrollo de los circuitos integrados
- Arquitecturas de computadoras
- Los procesadores digitales de señales (DSP)

Conclusiones

- El procesamiento digital de señales tiene sus orígenes desde que el hombre empezó a observar, contar y medir.
- Los procesos básicos del PDS como el muestreo y la interpolación han tenido sus orígenes en las matemáticas desde los tiempos clásicos.
- La teoría de Fourier es fundamental en el PDS.
- Las contribuciones de Nyquist y Shannon con el teorema de muestreo le dió un gran impulso al PDS
- El surgimiento y evolución de las máquina digitales ha hecho posible la implementación de los algoritmos del PDS en aplicaciones en tiempo real
- Se puede decir que el PDS se fundamenta en:
  la teoría, el hardware y software.
- En la actualidad el PDS es una área de gran evolución que está presente en una gran cantidad de actividades diarias del ser humano.