ÁLGEBRA LINEAL

Contenido

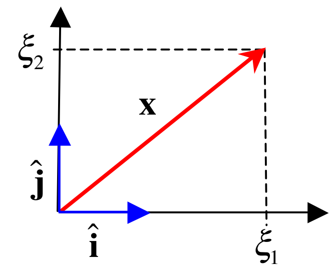
- Conceptos fundamentales: vectores, dependencia lineal.
- Transformaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones.
- Rango de un sistema y determinantes.
- Valores propios y vectores propios..

UNAM POSGRADO
Ingeniería

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES: VECTORES, ESPACIOS VECTORIALES.

INTRODUCCIÓN.

Notación: utilizamos abecedario latino para vectores, griego para escalares (números). Por ejemplo:



$\mathbf{x} = \xi_1\hat{\mathbf{i}} + \xi_2\hat{\mathbf{j}}$ es un vector en 2-D

ξ_1, ξ_2 son reales (aunque podrían ser complejos)

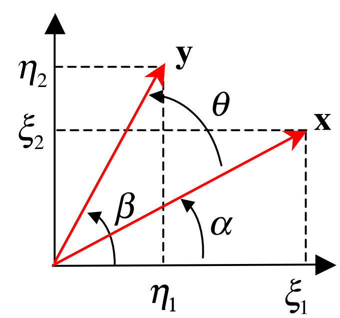
$\hat{\mathbf{i}}$ & $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores base, aunque esto es únicamente un sistema de etiquetas para distinguir a ξ_1 de ξ_2. De manera alternativa, podemos definir al vector de la forma: $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2)$, esto es, como un par ordenado de números. En general, si tenemos un sistema con n-grados de libertad, podemos extender esta descripción a ***n-adas***.

En álgebra lineal nos interesa definir cuatro operaciones fundamentales con los vectores. Si tenemos dos vectores $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2 \ldots, \eta_n)$, entonces definimos:

- Suma de vectores: $\mathbf{x} + \mathbf{y} \equiv (\xi_1, +\eta_1, \xi_2 + \eta_2 \ldots, \xi_n + \eta_n)$
- Multiplicación de un vector por un escalar (α): $\alpha\mathbf{x} \equiv (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ..., \alpha\xi_n)$
- Producto Interno (producto punto): $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \equiv \sum_1^n \xi_j \overline{\eta_j}$ ←conjugado
- Longitud de un vector (norma): $\|x\| \equiv \sqrt{\sum_1^n |\xi_j|^2}$

Notas:

1) Los escalares α, ξ, η pertenecen a un campo que podrá ser el campo de los reales $(\alpha, \xi, \eta \in \mathbb{R})$, o bien, el campo de los complejos $(\alpha, \xi, \eta \in \mathbb{C})$.
2) Para permitir que $\alpha, \xi, \eta \in \mathbb{C}$ utilizamos $\overline{\eta_j}$ en el producto interno y $|\xi_j|$ en la longitud, esto es:
$$|\xi_j|^2 = \xi_j \overline{\xi}_j, \quad \text{si } \xi_j \in \mathbb{C}$$
$$|\xi_j|^2 = \xi_j^2, \quad \text{si } \xi_j \in \mathbb{R}$$
3) No se ha definido la multiplicación de vectores, sólo multiplicación por un escalar.
4) Se puede definir el ángulo entre 2 vectores a través del producto interno y la longitud. Si $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, entonces podemos definir:



$$\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 \\ &= \|\mathbf{x}\|\cos\alpha\|\mathbf{y}\|\cos\beta + \|\mathbf{x}\|\operatorname{sen}\alpha\|\mathbf{y}\|\operatorname{sen}\beta \\ &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \\ &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos(\beta-\alpha) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos\theta \equiv \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

Nótese que esto se satisface si $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$; esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Schwarz, y con esta se establece la definición del ángulo entre dos vectores. Gracias a esta definición, podemos decir que dos vectores son ortogonales si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0$.

Ejemplo. Si definimos los vectores

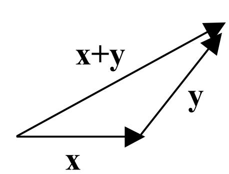
$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (2,1,-3,0) \\ \mathbf{y} &= (1,3,3,-2) \\ \mathbf{z} &= (1,-2,0,5)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} = (3,4,0,-2), 3\mathbf{x} = (6,3,-9,0), \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{23} \quad ,$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -4, \quad (\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{z} \to \quad \theta_{xz} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \cos\theta_{xy} = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{23}} \simeq -0.223, \quad \theta_{xy} = 103^\circ$$

Para poder utilizar longitudes de vectores y ángulos entre vectores, definimos el producto interno (producto punto o producto escalar).

DEFINICIÓN. La ***LONGITUD*** o ***NORMA*** de un vector, $\|\mathbf{x}\|$, cumple con:



(i) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$

(ii) $\begin{cases}\|\mathbf{x}\| > 0, \forall \mathbf{x} \ne 0 \\ \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0\end{cases}$

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \to$ Desigualdad del triángulo (de Minkowsky)

Para el espacio vectorial de n-adas (n-tuplos) se pueden considerar normas del tipo:

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \left(\sum_{1}^{n} \left| \xi_j \right|^p \right)^{1/p}$$

Comúnmente se utilizan la norma Euclidiana:

- $p = 2 \rightarrow \|\mathbf{x}\| \equiv \left(\sum_{1}^{n} \left| \xi_j \right|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{1}^{n} \left| \xi_j \right|^2} \rightarrow$ ***NORMA EUCLIDIANA***

DEFINICIÓN. Distancia entre dos vectores: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

DEPENDENCIA LINEAL, DIMENSIÓN Y BASES.

DEFINICIÓN. Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_n$ son ***LINEALMENTE DEPENDIENTES (LD)*** si existen escalares α_j, ***no todos cero***, tal que:

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 + ... + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$$

De otra manera, son ***LINEALMENTE INDEPENDIENTES (LI)***. Si son LD, al menos un $\mathbf{x}_j$ puede expresarse como una combinación lineal de los demás.

Ejemplo. Si $\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\mathbf{x}_1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\mathbf{x}_3 - ... - \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_2}\right)\mathbf{x}_n$

DEFINICIÓN. Un espacio vectorial tiene ***DIMENSIÓN*** n, si contiene un conjunto de n vectores LI. Cualquier conjunto de n+1 vectores es LD.

DEFINICIÓN. Una ***BASE*** para un espacio vectorial es un conjunto de vectores LI, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, tal que cualquier $\mathbf{x} \in$ al espacio puede ser expresado como una combinación lineal de ellos, esto es:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$$

La representación en términos de la base es **ÚNICA**: supongamos por ejemplo que representamos $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n$. Sustrayendo ambas representaciones obtenemos:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n = 0$$

Sabemos que los vectores base $\mathbf{e}_j$ son LI $\Rightarrow \alpha_j - \beta_j = 0, \therefore \alpha_j = \beta_j$

Observación: Si una base para el espacio tiene n vectores, entonces su dimensión debe ser n, y viceversa.

Ejemplo. Para el espacio de las *n*-adas:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,...0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,...0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0,0,...,1) \end{aligned}\right\}$$

Vectores LI en el espacio dado:

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0,0,...,0)$$

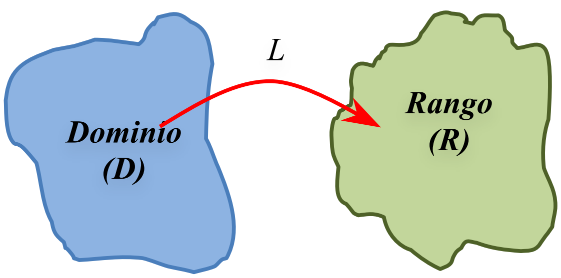
$$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Además: $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \rightarrow \in$ al espacio, y puede entonces expresarse como: $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + ... + \xi_n\mathbf{e}_n, \therefore$ el conjunto es una ***base***.

El espacio es ***n-dimensional*** (hay *n* vectores base). Este es el caso *n*-dimensional de la base $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$, aunque NO ES LA ÚNICA BASE POSIBLE en el espacio de las *n*-adas. La elección de la base apropiada surge de manera natural a partir del problema en estudio.

2. TRANSFORMACIONES LINEALES (OPERADORES)

CONCEPTOS BÁSICOS.



DEFINICIÓN. Un ***operador*** o transformación (*L*) es un mapeo de un espacio vectorial a otro. Una característica que siempre es deseable para *L* es que este debe ser univaluado, aunque no necesariamente uno a uno. En otras palabras:

Para $\mathbf{x} \in D$, $\exists$ $\mathbf{y} \in R$ tal que $L\mathbf{x}$=y,

aunque puede existir $\mathbf{x}' \in D$ tal que $L\mathbf{x}'=\mathbf{y}$.

Si para cada $\mathbf{y} \in R$ $\exists$ un sólo $\mathbf{x} \in D$ el ***mapeo es uno a uno***, esto es, $L\mathbf{x} = L\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z}$. De aquí se establece también que dos operadores (*A,B*) son iguales si tienen el mismo dominio y también si $A\mathbf{x}=B\mathbf{x}$, $\forall\, \mathbf{x} \in D$.

Algunos ejemplos simples de operadores:

- OPERADOR IDENTIDAD: $I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall\mathbf{x}$
- OPERADOR CERO (NULO): $\varnothing\mathbf{x} = 0, \forall\mathbf{x}$
- OPERADOR MATRIZ (MATRICIAL):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{ opera sobre el dominio } n\text{-dimensional: } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax}=\begin{pmatrix} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\dots+a_{1n}\xi_n \\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\dots+a_{2n}\xi_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\dots+a_{nn}\xi_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Para *n=2*, **A**=**I**:

$$\rightarrow \mathbf{Ax}=\mathbf{y}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}=\mathbf{x}; \qquad \text{A- OPERDOR IDENTIDAD}$$

PROPIEDADES Y OPERACIONES.

- SUMA: Dados A y B, con dominios a y b: C=(A+B)$\rightarrow$ suma de operadores
  $$\Rightarrow C\mathbf{x}=\left(\underbrace{A+B}_{suma\ \ de\ \ op.}\right)\mathbf{x}\equiv \underbrace{A\mathbf{x}+B\mathbf{x},}_{suma\ \ vectorial}\ \forall\ \mathbf{x}\in a,b$$

- PRODUCTO: $C=AB\Rightarrow C\mathbf{x}=(AB)\mathbf{x}=A(B\mathbf{x})$
  Similarmente: $\left(ABC\right)\mathbf{x}=A\Big(B\big(C\mathbf{x}\big)\Big)$

- CONMUTATIVIDAD: $A\mathbf{x}$, $B\mathbf{x}\rightarrow$ vectores
  $\Rightarrow A\mathbf{x}+B\mathbf{x}=B\mathbf{x}+A\mathbf{x}\Rightarrow A+B=B+A$ (conmutatividad en la suma)
  Sin embargo: *AB* no necesariamente igual a *BA; s*i *AB=BA*$\Rightarrow$*A y B* son conmutables.

- LINEALIDAD: Un operador L es lineal si se cumple que
  $$L(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha L\mathbf{x}+\beta L\mathbf{y}, \qquad \alpha,\beta \quad \text{- escalares, } \mathbf{x},\mathbf{y}\in D$$

OPERADORES MATRICIALES

Algunas definiciones fundamentales:

- Matriz diagonal: $a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$
- Matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$
- Matriz antisimétrica: $a_{ij} = -a_{ji}$ (nótese que $a_{jj} = -a_{jj} \Rightarrow a_{jj} = 0$)
- Matriz identidad: $I = \left\{ \delta_{ij} \right\}$
- Matriz transpuesta: Si $A = \left\{ a_{ij} \right\}, A^T = \left\{ a_{ji} \right\}$

Supongamos que: $D = AB$

$\Rightarrow D^T = (AB)^T = B^T A^T$; similarmente: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES

La forma general de este problema es: $L\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (ecuación lineal). Cuando L=**A**, esto es, se utiliza el operador matricial, tenemos un ***sistema de ecuaciones*** (sistema matricial). Existen varios métodos de solución para este tipo de sistemas; el más simple es probablemente el ***método de eliminación de Gauss***, pues es sistemático. La idea básica es llevar el sistema A**x**=**c** a una forma triangular utilizando transformaciones equivalentes.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 1 \\ 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 &= 6 \\ \xi_1 \qquad + 3\xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{1er renglon - } 2^{\text{o}} \text{ renglon} \\ \leftarrow (\text{1er renglon - 3er renglon}) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \xi_3 = -\frac{8}{13}, \xi_2 = -\frac{19}{13}, \xi_1 = \frac{24}{13} \qquad \therefore \exists \text{ una solución única}$$

Ejemplo.

$$\begin{array}{l} \xi_1 + 2\xi_2 = 1 \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \xi_1 + 2\xi_2 = 1 \\ 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El sistema no tiene solución}$$

En general, en estos problemas se pueden encontrar las siguientes posibilidades:

(a) Existe una solución única.
(b) No existe solución.
(c) Existe un número infinito de soluciones.

En algunos casos es fácil reconocer cualquiera de las posibilidades anteriores; sin embargo, para casos más complejos (por ejemplo, sistemas con matrices de alto orden) resulta útil establecer las condiciones de existencia de soluciones.

CONDICIONES DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Preguntas fundamentales: ¿Tiene solución $L\mathbf{x}=\mathbf{c}$?
¿$\mathbf{c}\in R$ de L?
¿Es la solución única?

TEOREMA (EXISTENCIA): Una condición necesaria para la existencia de una solución de $L\mathbf{x}=\mathbf{c}$ es que $(\mathbf{c},\mathbf{z})=0, \forall\mathbf{z}$ tal que $L^{*}\mathbf{z}=\mathbf{0}$.

Para ***operadores matriciales de dimensión finita***, esta condición es ***necesaria y suficiente***.

TEOREMA (UNICIDAD): La solución de $L\mathbf{x}=\mathbf{c}$ (si es que existe) es única, si y solo si, la ecuación homogénea $L\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial ($\mathbf{x}=\mathbf{0}$). Si tiene una solución no trivial, entonces $L\mathbf{x}=\mathbf{c}$ tendrá un número infinito de soluciones.

Ejemplo 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^{*}=\overline{\mathbf{A}^{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos la existencia de la solución para el sistema:

$$\mathbf{A}^{*}\mathbf{z}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}=0 \rightarrow \text{ soluciones no triviales: } \eta_1=-\eta_2 \qquad \rightarrow \mathbf{z}=\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \forall\alpha$$

$$(\mathbf{c},\mathbf{z})=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=\alpha\neq 0, \qquad \nexists \text{ solución al sistema}$$

Supongamos que: $c=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(c,z)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \exists \text{ en este caso una solución. Para verificar si es única:}$$

Problema homogéneo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Soluciones no triviales: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \forall\alpha$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ tiene una solución que no es única}$$

MÉTODOS DE SOLUCIÓN: OPERADOR INVERSO, REGLA DE CRAMER.

De acuerdo a la teoría de operadores, el sistema $L\mathbf{x} = \mathbf{c}$ puede resolverse algebraicamente mediante el operador inverso, esto es: $\mathbf{x} = L^{-1}\mathbf{c}$. El problema fundamental es entonces encontrar el operador inverso L^{-1}.

$$\Rightarrow L^{-1}L\mathbf{x} = L^{-1}\mathbf{c}, \quad \therefore \mathbf{x} = L^{-1}\mathbf{c}$$

En general:

- $L = \mathbf{A} \Rightarrow L^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ (matriz inversa)

Para definir el operador matricial inverso (inversa de una matriz) debemos introducir el ***determinante*** de la matriz. Por definición:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \rightarrow \text{ EXPANSIÓN DE LAPLACE (para } k \text{ fijo)}$$

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}; \quad M_{jk} \rightarrow \text{ determinante menor (cofactor)}$$

$$\therefore \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} (-1)^{j+k} M_{jk} \text{, para } k \text{ fijo.}$$

Ejemplo.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} (-1)^{j+k} M_{jk}, \quad \text{k fijo}$$

Fijando *k=1* podemos evaluar:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(-1)^2 M_{11} + a_{21}(-1)^3 M_{21} = ad - bc$$

Ejemplo.

Evaluemos el determinante de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \ |\mathbf{A}| = (1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (1)(-6) - (1)(5) + (-2) = -13 \text{ (expansión sobre la primera fila)}$$

$$|\mathbf{A}| = (1)(-1) - (0) + (3)(-4) = -13 \text{ (expansión sobre la tercera fila)}$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)(5) - (2)(4) = -13 \text{ (expansión sobre la segunda columna)}$$

Propiedades útiles del determinante:

(i) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$

(ii) Si todos los elementos de una columna o reglón de **A** son cero $\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0$

(iii) Si dos columnas o renglones cualesquiera se intercambian para formar $\mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$

(iv) Si **B** se obtiene de multiplicar un escalar α por algún renglón o columna de $\mathbf{A} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \alpha|\mathbf{A}|$

(v) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

(vi) Si dos columnas o renglones cualesquiera son proporcionales $\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0$

Regresemos ahora a resolver **Ax**=**c**, o equivalentemente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = c_i,\ i = 1,2,...,n$$

Utilizando el cofactor $\mathbf{A}_{ik}$ (multiplicando y sumando):

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}c_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}a_{ij}\right)}_{\substack{=|A|,\, j=k \\ =0,\, j\neq k \ \ \to \text{propiedad } (vi)}} \xi_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}c_i$$

$$\therefore\ |\mathbf{A}|\ \xi_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}c_i \ \ \Rightarrow \xi_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ik}}{|\mathbf{A}|}, k = 1,2,...,n$$

REGLA DE CRAMER

Observemos que:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{ik}}{|\mathbf{A}|}\right)c_i \ \to \text{Forma matricial:} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \cdots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \cdots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \left\{ a_{ij} \right\} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} A_{ji}$$

A_{ji}-matriz de cofactores transpuesta

Si $|\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \nexists$ y $\mathbf{A}$ es una MATRIZ SINGULAR

Propiedades importantes de la matriz inversa:

- $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- $|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$

Otra noción importante es el ***rango*** de una matriz:

DEFINICIÓN. El **rango de una matriz** (no necesariamente cuadrada) es el orden del arreglo cuadrado más grande contenido en la matriz, formado al eliminar ciertas columnas y renglones, cuyo determinante sea distinto de cero.

Ejemplo 6. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

TEOREMA (Existencia, unicidad y rango).
Ax=**c** posee una solución $\Leftrightarrow$ el rango de la matriz aumentada es igual al rango de la matriz **A**. Si el rango de **A** (donde **A** es de *nxn*) es *n*, *i.e.*, $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces la solución existe y es única.

Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{matrix} Rango(\mathbf{A}) = 1 \\ Rango(\mathbf{Ac}) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ no hay solución}$$

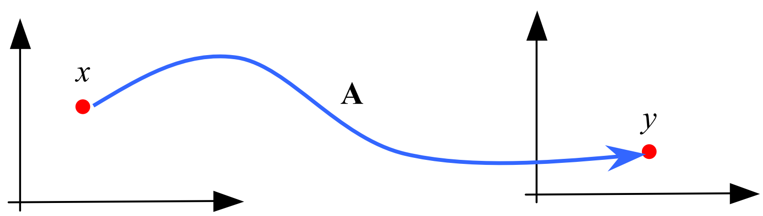
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{matrix} Rango(\mathbf{A}) = 1 \\ Rango(\mathbf{Ac}) = 1 \end{matrix}\right\} \mathbf{A} \to nxn \Rightarrow \exists \text{ solución pero no es única.}$$

4. VALORES Y VECTORES PROPIOS

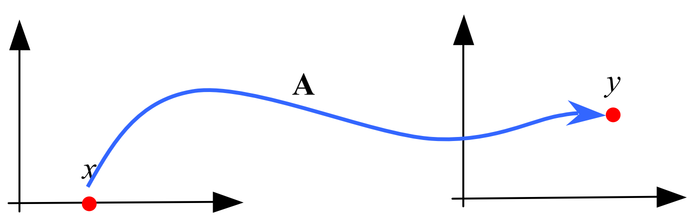
Consideremos la multiplicación de una matriz por un vector:

$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$; en *2-D* esto es: $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

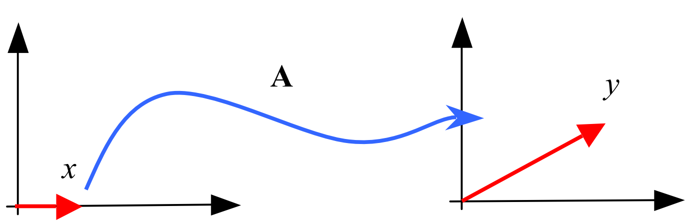
A transforma **x** en **y**, esto es, un punto en *2-D* a otro punto en *2-D* (equivalentemente, podemos verlo como un mapeo de R^2 en R^2). Gráficamente:



*Ejemplo***.** Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Si en vez de puntos consideramos radio vectores, podemos representar la transformación como:



De acuerdo a las operaciones básicas entre vectores, podemos ver que el vector **x** gira y se alarga: el giro está dado por $\tan^{-1}(½)$, mientras que la magnitud es ahora $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{5}\|\mathbf{x}\|$.

Podemos decir entonces que una matriz de nxn toma un radio-vector en R^n y lo transforma en otro vector de R^n que está girado y alargado.

Consideremos ahora el caso:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nótese que el vector no gira, sólo se hace 3 veces más largo. El problema de ***eigenvalores*** y ***eigenvectores*** (valores propios y vectores propios) consiste en encontrar los vectores que no giran bajo una transformación (esto es, multiplicación por una matriz). El *eigenvalor* nos da el cambio de longitud (nótese que si el *eigenvalor* es negativo se puede pensar en un giro de π radianes o en una inversión).

$$\therefore \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (0 \rightarrow 0 \quad \text{, pues } \mathbf{A}0 = 0)$$

Buscamos entonces $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x}$, o equivalentemente: $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{x} = 0$ (*)

Para resolver esto, notamos que si $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ existe $\Rightarrow \mathbf{x} = \left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} 0 = 0$, esto es, obtenemos la solución trivial al problema. Por lo tanto, para que $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ no exista $\Rightarrow \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$.

Ejemplo. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Del determinante obtenemos el polinomio característico:

$$\left(2-\lambda\right)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = \left(\lambda - 3\right)\left(\lambda - 1\right) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 3, 1$ son los eigenvalores (o valores propios).

Para encontrar el eigenvector asociado a λ utilizamos (*)

Para $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \xi_1 = \xi_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, esto es, cualquier escalar α satisface esta condición.

Es conveniente construir eigenvectores cuya longitud sea 1, esto es, es conveniente normalizarlos:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \text{ para } \quad \lambda = 3, \quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Similarmente, para $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = -\xi_2$

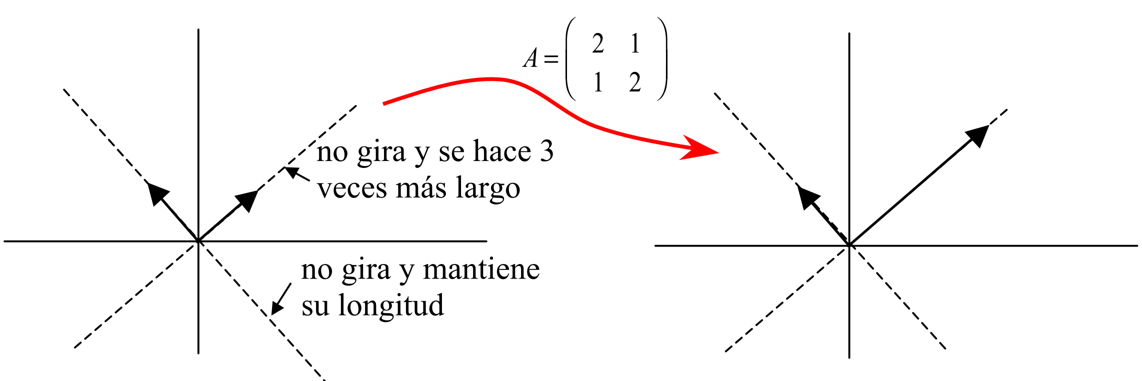
eigenvector $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (Nótese que $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ también es eigenvector)

Con los eigenvectores normalizados podemos construir la ***matriz modal*** si los acomodamos por columnas, esto es:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvector para $\lambda = 3$ Eigenvector para $\lambda = 1$

Gráficamente podemos representar esto como:



TEOREMAS SOBRE OPERADORES AUTOADJUNTOS.

I Si un operador L es autoadjunto, entonces:

a) los eigenvalores λ_i son reales
b) los eigenvectores $\mathbf{e_i}$ correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales.

II Para cualquier operador L autoadjunto en un espacio con dimensiones finitas, se pueden encontrar k eigenvectores ortogonales para un eigenvalor con multiplicidad k.

Nótese que esto implica que no importa si los eigenvalores son distintos o no, de cualquier manera los eigenvectores son ortogonales.

II Los eigenvectores de cualquier operador autoadjunto L en un espacio con dimensiones finitas forman base.

$\therefore$ Construir eigenvectores es equivalente a construir una base para el espacio con dimensiones finitas.

MÁS EJEMPLOS Y DEFINICIONES CON OPERADORES MATRICIALES.

Ejemplo. Se puede demostrar mediante el problema general de eigenvalores que si:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm b$$

Ejemplo. Consideremos ahora $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nótese que $\mathbf{A}$ está separada por bloques; para este tipo de matrices podemos reconocer la forma de los eigenvectores y eigenvalores. En particular, en este caso podemos esperar que uno de los eigenvectores sea $\lambda=2$. Los bloques pueden visualizarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1=2 \text{, con eigenvector asociado } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para verificar esto podemos utilizar la metodología usual:

Ecuación característica: $\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right| = 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right) = (2-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda\right) = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2 \quad \leftarrow \quad$ valores repetidos.

Eigenvectores:

Para $\lambda_1=0$:

$$\left(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}\right)\mathbf{x} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2-0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ll} 2\xi_1 = 0 \rightarrow & \xi_1 = 0 \\ \xi_2+\xi_3 = 0 \rightarrow & \xi_3 = -\xi_2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_1} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Para} \quad \lambda = 2: \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad -\xi_2+\xi_3 = 0, \quad \xi_2 = \xi_3 \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Nótese que se pueden encontrar 2 eigenvectores ortogonales y además ambos son ortogonales a $\mathbf{e_1}$. Podemos tomar:

$$\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos $\lambda_1 = 0,\quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, o bien $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 2,\quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y finalmente $\lambda_3 = 2,\quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

En este ejemplo puede verse la utilidad de reconocer o agrupar bloques dentro de una matriz para obtener los eigenvalores. El bloque de un solo elemento da automáticamente el eigenvalor (en este caso 2) y en este caso en particular, es fácil reconocer la forma que debe tener el eigenvector asociado. El bloque de 2x2 es una matriz simétrica, y de acuerdo al ejemplo3, los eigenvalores son 0 y 2.

Los eigenvalores de un matriz nos dan información sobre el determinante. En particular, en el ejemplo 4 encontramos que $\lambda_1 = 0$. Esto implica que $\mathbf{A}^{-1}$ no existe dado que $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$. Para matrices de 3x3, la ecuación característica puede escribirse como:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

en donde I_1, I_2, I_3 son los invariantes de la matriz, dados por:

$$I_1 \equiv tr(\mathbf{A}) \quad \left(traza = a_{11} + a_{22} + a_{33}\right)$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{2}\left(\left(tr\mathbf{A}\right)^2 - tr\mathbf{A}^2\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 \equiv |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Si I_3=0 se puede ver que $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - I_1\lambda + I_2\right) = 0$, lo cual implica que uno de los eigenvalores es cero.

Ejemplo. Del ejemplo anterior podemos ver que para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$\lambda_1 = 0, \quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Con este resultado y agrupando por bloques podemos obtener también:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ tenemos 2 bloques } \begin{pmatrix} \Delta & & \Delta \\ & \square & \\ \Delta & & \Delta \end{pmatrix}$$

$$\text{bloque } 1x1 \Rightarrow (2),\ \lambda = 2,\ \mathbf{e} = (1)$$

$$\text{bloque} \quad 2x2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0,2 \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Los eigenvectores son entonces:

$$\lambda = 0, \quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad ; \qquad \lambda = 2, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda = 2, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Similarmente, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$\lambda_1 = 0,\ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 0,\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 2,\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \lambda_4 = 2,\ \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Los bloques pueden también encontrarse intercalados; por ejemplo, si:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tenemos 2 bloques intercalados de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ, POTENCIAS, INVERSAS, EXPONENCIALES, ETC.

Considerando operadores matriciales autoadjuntos ($A^* = \overline{A}^T$), el problema de eigenvalores tiene la forma:

$$\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 .., \lambda_n \qquad \text{con eigenvectores} \quad \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ...\mathbf{e_n}$$

De acuerdo a los teoremas vistos anteriormente, los $\lambda's$ son reales y los eigenvectores son ortogonales, o inclusive, pueden hacerse ortonormales:

$$\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j, \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Además, los eigenvectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ forman base para R^n. Analicemos ahora la matriz modal y la matriz diagonal de eigenvalores asociada, ambas definidas por:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2) & \cdots & (\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Se puede ver que la matriz modal es una ***matriz ortogonal***, esto es: $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ pues:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frown{\mathbf{e}}_1 \\ \frown{\mathbf{e}}_2 \\ \vdots \\ \frown{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} \left((\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2)...(\mathbf{e}_n) \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades útiles de una matriz ortogonal:

(1) El determinante es ± 1 $\quad \rightarrow \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \left|\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right| = \left|\mathbf{Q}\right|^2 = 1, \quad \left|\mathbf{Q}\right| = \pm 1$.

(2) No cambia la longitud de vectores. Supongamos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{y}^T, \mathbf{y})} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$$

Con esto vemos entonces que la matriz modal ***Q sólo gira vectores.***

La matriz modal se puede utilizar para escribir en forma canónica la matriz **A**. Consideremos el caso general:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frown{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \frown{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} (\mathbf{A}) \left((\mathbf{e}_1)...(\mathbf{e}_n) \right) = \begin{pmatrix} \frown{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \frown{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} \left((\mathbf{A}\mathbf{e}_1)...(\mathbf{A}\mathbf{e}_n) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frown{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \frown{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} \left((\lambda_1\mathbf{e}_1)...(\lambda_n\mathbf{e}_n) \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \Lambda$$

Pre-multiplicando por **Q** obtenemos:

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda$$
$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda$$

Post-multiplicando por $\mathbf{Q}^T$:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T, \text{ y también: } \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$$

Expresar la matriz **A** en términos del producto de la matriz modal, la matriz diagonal de eigenvalores y la matriz modal transpuesta es útil para realizar varias operaciones matriciales de interés. Observemos que:

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{e} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda^2\mathbf{e}$$

En general: $\mathbf{A}^n\mathbf{e} = \lambda^n\mathbf{e}$. Nótese también que

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \left(\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\right)\mathbf{e}_k = \mathbf{Q}\Lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k\mathbf{e}_k$$

Si expresamos la matriz en términos de la matriz modal y la matriz diagonal de eigenvalores:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T, \quad \rightarrow \mathbf{A}^2 = (\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T)(\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\Lambda^2\mathbf{Q}^T$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}^m = \mathbf{Q}\Lambda^m\mathbf{Q}^T$$

Donde: $\Lambda^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Algunos casos particulares interesantes:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1}\Lambda^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\Lambda^{-1}\mathbf{Q}^T, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

Si: $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \equiv \mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^T$ con $\Lambda^{\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Nótese que $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^2\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T = \mathbf{A}$

En general, esta descomposición de la matriz **A** permite realizar cualquier operación matricial manipulando únicamente la matriz diagonal de eigenvalores. Supongamos, por ejemplo, que queremos evaluar $2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A}$. Utilizando la descomposición se obtiene:

$$2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}\Lambda^2\mathbf{Q}^T - 3\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}(2\Lambda^2 - 3\Lambda)\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} 2\lambda_1^2 - 3\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\lambda_n^2 - 3\lambda_n \end{pmatrix}\mathbf{Q}^T$$

De igual forma, podemos evaluar la matriz exponencial:

$$e^A \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots$$

Utilizando la descomposición matricial:

$$e^A = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\frac{\Lambda^2}{2}\mathbf{Q}^T + \cdots = \mathbf{Q}\left(\mathbf{I} + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \ldots\right)\mathbf{Q}^T$$

$$\Rightarrow \;\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}\mathrm{e}^{\Lambda}\mathbf{Q}^{T}, \quad \mathrm{e}^{\Lambda} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

APLICACIONES.

Consideremos $Ax = c, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Para resolver este problema podemos:

1) Despejar $x = A^{-1}c$ (esto es, utilizar álgebra matricial).

2) Utilizar una "eigen-expansión". Sabemos que $\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e}$, y por la forma de la matriz obtenemos:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ +\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz es autoadjunta y, por lo tanto, los eigenvectores son base ortonormal (ON) para el espacio vectorial. Esto implica que podemos expresar cualquier otro vector como una combinación lineal de ellos. Consideremos, por ejemplo:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{c}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2, \;\; \mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$$

Si encontramos los coeficientes α y β del vector **x** podremos encontrar la solución del problema. Expresando todo en términos de los eigenvectores obtenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) = \alpha\mathbf{Ae}_1 + \beta\mathbf{Ae}_2 = \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2$$

$$\therefore \alpha = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1)}{\lambda_1} \quad \beta = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{e}_2)}{\lambda_2}$$

Supongamos que $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \quad (\mathbf{c}, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{c}, \mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Por lo tanto: $\alpha = 0, \quad \beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$