# Guía de estudio para el Examen de Matemáticas

Posgrado en Ingeniería (Energía)
Universidad Nacional Autónoma de México
Ingreso 2022-1

**Álgebra lineal y geometría analítica**

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 13 \end{aligned} \tag{1}$$

2.

$$\begin{aligned} 5x - 2y - z &= -7 \\ x - 2y + 2z &= 0 \\ 3y + z &= 17 \end{aligned} \tag{2}$$

3.

$$\begin{aligned} 4x - y + 3z &= 6 \\ -8x + 3y - 5z &= -6 \\ 5x - 4y &= -9 \end{aligned} \tag{3}$$

4. Un tanque de agua puede ser llenado por tres tubos A, B y C. El tubo A por sí solo puede llenar el tanque en 8 horas. Si los tubos A y C se usan juntos, el tanque se puede llenar en 6 horas; si el B y C se usan juntos, tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenar el tanque si se usan los tres tubos?

5. Despeje $x$ del sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fz &= g \\ hx + iy &= j \end{aligned} \tag{4}$$

6. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 6 \\ 3 & a & 5 \\ 4 & 2 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 \\ 17 & -19 & 21 \\ 8 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine el valor de $a \in \Re$ tal que $AB = C$

7. Exprese como una sola matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \left( \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

8.

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} \tag{5}$$

9.

$$\frac{37 - 11x}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} \tag{6}$$

10.

$$\frac{x + 34}{(x^2 - 4x - 12} \tag{7}$$

11. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores de la siguiente la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores de la siguiente la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

tal que dicha tangente sea paralela a la recta $y + 3x + 7 = 0$.

14. Hallar, si existen, las coordenadas $x$,$y$ de los puntos sobre la curva definida por la fórmula:

$$f(x) = \frac{5 - 2x}{x - 3},$$

donde la recta tangente es paralela a la recta definida por la ecuación:

$$-x + 4y = 4.$$

15. Considere el semicírculo definido por la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ en el intervalo} - 2 < x < 2$$

a) Considere la recta vertical $x = 1$, encuentre el punto de intersecciòon entre esta recta y el semicírculo, y determine las rectas tangente ($t(x)$) y normal ($n(x)$) al semicírculo en el punto de intersección. b) Encuentre el ángulo $\theta$ entre la recta $x = 1$ y la recta normal $n(x)$.

**Cálculo diferencial e integral**

16. Si $f$ y $g$ son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encuentre $g(3)$.

17. 2. Hallar el valor de $a$ y $b$ que hace a $f$ continua en todas partes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2; \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3; \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

18. Sea $y^2 = x^3 + 3x^2$, una ecuación cúbica implícita. a) Encuentre la derivada de $y$ con respecto a $x$. b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1, -2).

19. Encuentre $dy/dx$ por derivación implícita:

    a) $1/x + 1/y = 1$

    b) $e^{x^2 y} = x + y$

20. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$, y $f(1) = 2$, encuentra $f'(1)$.

21. Encuentre los puntos sobres la curva

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$$

donde la tangente es horizontal (esto es: $y' = 0$).

22. Encuentre la primera derivada $dy/dx$ y la segunda derivada $(d^2y)/(dx^2)$ de la siguiente ecuación implícita: $\cos y = x$.

23. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área determinada, el que tiene el menor perímetro es el cuadrado. (b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro determinado, el que tiene mayor área es el cuadrado.

24. Una ventana tiene la forma de un rectángulo más un semicírculo (ver figura 1). Es decir, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es de 10 metros (sin contar la línea entre el rectángulo y el semicírculo), encuentra las dimensiones de la ventana para que deje pasar la máxima cantidad posible de la luz (o sea, calcula la máxima área que puede tener la ventana).

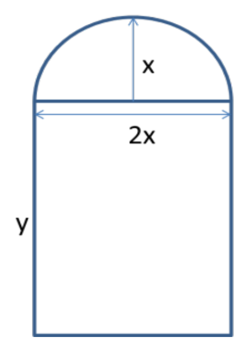


Figura 1:

25. Calcula el valor de c en el intervalo [0,4] sobre el eje $x$ que maximiza el ángulo $\theta$ determinado por los tres puntos en el plano $x - y$: (0,2), (c,0) y (4,2), ver la siguiente figura 2.

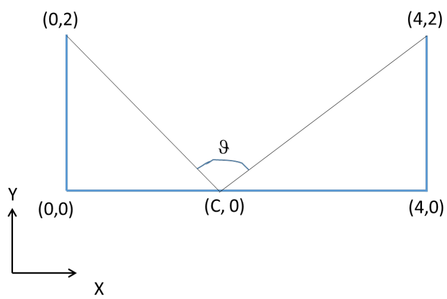


Figura 2:

26. Sea $f(x,y) = x^2y^4 - x\mathrm{sen}y + ye^{3x}$. Calcula:

$$a)\ \frac{\partial f}{\partial x}; \quad b)\ \frac{\partial f}{\partial y}; \quad c)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad d)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

27. Calcular la siguiente integral: $\int \frac{\ln x}{x^3}\ dx$

28. Calcular la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ en el intervalo $[0, 1]$ (Sugerencia: la longitud de arco de una curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por $L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$).

29. Calcular la integral doble iterada $\int_{-1}^{1} \int_0^y (x+y)^2\ dx\ dy$.

30. Hallar un valor aproximado del incremento del área de una esfera de 10 cm de radio al aumentar el radio 2 mm.

31. Calcular las siguientes integrales indefinidas

    a) $\int \left(x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) dx$

    b) $\int \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} dx$

    c) $\int \dfrac{x^3}{x + 1} dx$

32. Utilizando la Regla del L'Höpital calcular los límites siguientes:

    a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\mathrm{sen} x}$

b)$\lim_{x\to 0} x^{\tan x}$

33. Hallar todas las segundas derivadas parciales de la función $f(x,y,z) = e^z + \frac{1}{x} + xe^{-y}$ en la región en que $x \neq 0$.

34. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla

    a) $F(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

    b) $F(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

35. Encontrar el valor mínimo de la función *f(x,y)*= $x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x + y = 1$.

36. Sea la curva de ecuación $r(t) = (1 - \cos t)\ \mathbf{i} + (1 + \cos t)\ \mathbf{j} + \sqrt{2}\text{sen}t\ \mathbf{k}$. Determinar las coordenadas de los puntos de la curva en los que la tangente sea perpendicular al vector de posición.

    Sea $F = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + x^2ye^z + z^2\mathbf{k}$. Calcular $\nabla \cdot F, \nabla \times F$ y hallar una función que satisfaga $F = \nabla f$.

37. Sean $a, b > 0$ y considérese una partícula puntual de masa $m$ que se mueve a lo largo de la curva en $\Re^3$ definida por $\mathbf{c}(t) = (a\cos t, b \text{ sen } t, t^2)$.

    a) Hallar la ecuación de la recta tangente a esa curva en $t = \pi$.

    b) Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula en $t = \pi$.

38. Sea $f(x,y) = e^{xy}\text{sen }(x+y)$.

    a) Hallar la dirección, empezando en $(0, \pi/2)$, en la que $f$ está cambiando más rápido.

    b) Hallar la dirección, empezando en $(0, \pi/2)$, en la que $f$ está cambiando al 50 % de su tasa máxima.

39. Se desea construir una pila que genere un campo eléctrico dado por:

    $\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 5 + z\right)\mathbf{k}$.

    ¿Es posible producir tal fuente de energía? Justificar la respuesta.

40. Hallar el volumen del sólido acotado por la gráfica de la función $z = x^2+y$, y el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$.

41. Calcular el valor de $\int\int e^{-x^2-y^2}dA$ donde R es la región del plano localizada entre las dos circunferencias con centro en el origen y radios $R=2$ y $R=4$, respectivamente.

42. a) Encuentre el ángulo $\theta$ que forma la siguiente pareja de vectores y determine si son ortogonales:

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Asimismo, encuentre un vector con magnitud unitaria perpendicular a ambos vectores.

b) Encuentre el ángulo $\theta$ entre los gradientes de las funciones:

$$f = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad h = x + y + 2\sqrt{xy}$$

en el punto (1,1).

43. a) Si $h(x,y) = x^y$, encuentre el gradiente de $h$, es decir $\nabla h$, y su magnitud en el punto (1,2,3).

b) La diferencial de una función escalar $\phi = \phi(x,y,z)$ está dada por

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r},$$

donde $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Calcule la diferencial de la función

$$\varphi(x,y,z) = xye^{yz/x^2}.$$

44. a) Muestre que el campo de fuerza gravitacional

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

es el gradiente del escalar

$$f = k\frac{Mm}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en la dirección que une las dos masas $M$ y $m$, y $k$ es una constante. b) Muestre que $\nabla^2(1/r) = 0$.

Nota: recuerde que el operador Lapalciano está definido como:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

45. a) Muestre que el rotacional del gradiente de cualquier función escalar, $f(x,y,z)$, es cero, es decir, $\nabla\times(\nabla f) = 0$. Verifíquelo para la función escalar $f(x,y,z) = f = \ln(xy+yz+xz)$. b) Muestre que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial, $\mathbf{v}$, es igual a cero. Es decir: $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{v} = 0$. Verifique este resultado aplicándolo a $\mathbf{v} = x\cos z\hat{\mathbf{i}} + y\ln x\hat{\mathbf{j}} - z^2\hat{\mathbf{k}}$.

46. Un campo vectorial $\mathbf{v}$ tiene el potencial $\phi = x^2(1+z) + y^2(1-z)$, es decir, $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Use el teorema de Gauss (teorema de la divergencia) para calcular el flujo de este campo que sale de un cubo unitario con tres de sus aristas sobre los ejes cartesianos.

47. a) Muestre que el campo vectorial $\mathbf{F} = xy^2\hat{\mathbf{i}} + x^2y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ es irrotacional, es decir, $\nabla\times\mathbf{F} = 0$. b) Lo anterior implica que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f$ es una función escalar. Encuentre la función $f$.

48. Considere el campo vectorial bidimensional $\mathbf{v} = v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}}$, cuyas componentes están dadas por:

$$v_x = -\frac{Ay}{x^2+y^2}, \quad v_y = \frac{Ax}{x^2+y^2}$$

donde $A$ es una constante. a) Muestre que el campo vectorial $\mathbf{v}$ es solenoidal, es decir, que su divergencia es cero: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Muestre que el campo vectorial es irrotacional, es decir, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. b) Lo anterior implica que dicho campo se puede expresar como el gradiente de una función escalar, es decir, $\mathbf{v} = \nabla\phi$, donde $\phi$ es la función escalar. Encuentre la función $\phi$.

49. El teorema de la divergencia o teorema de Gauss, establece que es equivalente integrar la proyección de un vector $\mathbf{F}$ sobre una superficie arbitraria $S$ que encierra a un volumen $V$ que integrar la divergencia del vector $\mathbf{F}$ sobre dicho volumen. Esto es:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie.

Verifique este teorema aplicándolo al vector de posición en el especio tridimensional definido por $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ cuando la superficie en cuestión es una esfera de radio $a$ centrada en el origen. Es decir, muestre el siguiente resultado:

$$\int\int_S \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = 4\pi a^3$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$ es el vector normal a la superficie, y $dS$ y $dV$ son, respectivamente, las diferenciales de superficie y volumen de la esfera.

**Probabilidad y estadística**

50. La función de distribución de una variable aleatoria $X$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{fuera de este intervalo.} \end{cases}$$

Hallar el valor medio $\mu$, la varianza $\sigma^2$ y la desviación estándar $\sigma$ de esta distribución.

51. Suponga que alguien va a participar en un juego con un dado que está balanceado. En este juego, un jugador gana 20 pesos si al lanzar el dado le sale 2; 40 pesos si le sale 4, pierde 30 pesos si le sale 6 y no gana ni pierde nada si le sale cualquier otro número.Hallar la suma esperada de dinero que un jugador puede ganar.

52. La función de distribución de una variable aleatoria $X$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x(9-x^2)}{81}, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & \text{fuera de este intervalo.} \end{cases}$$

Calcular el promedio, la moda y la mediana de esta distribución.

53. Un fabricante de motores fuera de borda recibe un cargamento de tornillos de seguridad necesarios para armar los motores. Se elige una muestra aleatoria de diez tornillos para determinar la presión que haría que un tornillo se rompiera. En las unidades correspondientes, las presiones requeridas para el rompimiento fueron de 19, 23, 27, 19, 23, 28, 27, 28, 29 y 27. Determinar los valores del promedio, la mediana y la moda de esta distribución.

54. Hallar la probabilidad de obtener exactamente dos águilas al lanzar 6 veces una moneda perfectamente balanceada.

**Ecuaciones diferenciales**

55. La corriente $I$ en un cierto circuito eléctrico satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} + 2I = 10e^{-2t},$$

donde $t$ es el tiempo. Si $I = 0$ cuando $t = 0$, encuentre $I$ como función de $t$.

56. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$xy' + 3y = x^2.$$

57. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{10y}{2x+5} = 10,$$

con la condición $y = 0$ en $x = 0$.

58. Resuelva la ecuación

$$xy'' + y' = 4x.$$

con las condiciones $y'(1) = 1$ y $y(0) = 0$.

59. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

$$y'' = 4y'$$

60. Encuentre la solución de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

con las condiciones $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.